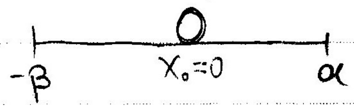
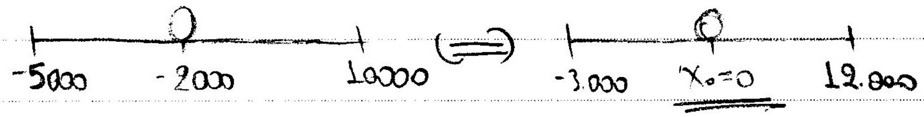
(10) 20/10

Τυχαίος Περίπατος με 2 φράγματα απορρόφησης



Παρατήρηση

Το $X_0=0$ είναι βασική προϋπόθεση, π.χ. όταν $X_0\neq 0$:



Ερωτήματα

1ο) P(απορρόφησης) $= 1 -$ P(κινείται απεριόριστα)

2ο) P(απορρόφησης στο α) κ P(απορ. στο $-\beta$)

3ο) Μέσος χρόνος απορρόφησης

Απαντήσεις

1ο) P(κινείται απεριόριστα) $= P(-\beta < X_n < \alpha) \leq P(-\beta \leq X_n^* < \alpha) \cong$ (Α.Ε.Τ.Π.)

$$\Phi\left(\frac{\alpha - n\mu_1}{\sqrt{n}\,\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{-\beta - n\mu_1}{\sqrt{n}\,\sigma_1}\right) \longrightarrow 0$$ άρα P(απορρόφησης) $=1$

P(απορρόφησης στο α) + P(απορ. στο $-\beta$) $= 1$ (για να το χρησιμοποιήσουμε πρέπει να το αποδείξουμε)

2ο) **Θεώρημα - Ταυτότητα WALD**

$$E\left[g(s)^{-T} e^{X_T s}\right] = 1 \quad \forall\, s \in S$$

Παρατηρήσεις

α) Η X_T είναι μία διακριτή τ.μ. με τιμές $\alpha, -\beta$

Έστω ότι $\exists\, s_0,\ s_0 \neq 0 : g(s_0) = 1 \Rightarrow E(e^{X_T s_0}) = 1 \Rightarrow$

$e^{\alpha s_0} P(X_T = \alpha) + e^{-\beta s_0} P(X_T = -\beta) = 1 \iff$

$e^{\alpha s_0}$ P(απορ. στο α) $+ e^{-\beta s_0}$ P(απορ. στο $-\beta$) $= 1 \xrightarrow{A = P(\text{απορ στο } \alpha)}$

$e^{\alpha s_0} A + e^{-\beta s_0}(1 - A) = 1$

$(e^{\alpha s_0} - e^{-\beta s_0}) A = 1 - e^{-\beta s_0} \Rightarrow$

$$B = 1 - A = \frac{e^{\alpha s_0} - 1}{e^{\alpha s_0} - e^{-\beta s_0}} \quad \text{κ} \quad A = \frac{1 - e^{-\beta s_0}}{e^{\alpha s_0} - e^{-\beta s_0}}$$

Υπάρχει s_0 με $s_0 \neq 0$, όταν το $\mu = E(Y_i) \neq 0$

$g(s)=E\left[e^{sY}\right] \Rightarrow g'(s)=E\left[Ye^{sY}\right] \Rightarrow g'(0)=E(Y)$

$g''(s)=E\left[Y^2e^{sY}\right] \Rightarrow g''(0)=E(Y^2)$

$g'''(s)=E\left[Y^3e^{sY}\right] \Rightarrow g'''(0)=E(Y^3)$

$\vdots$

Άρα ισοδύναμα s_0 θα υπάρχει, $s_0\neq 0$ όταν $g'(0)\neq 0$

β) Έστω ότι δεν υπάρχει s_0 με $s_0\neq 0$

$$A=\lim_{s_0\to 0}\frac{1-e^{-\beta s_0}}{e^{\alpha s_0}-e^{-\beta s_0}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{s_0\to 0}\frac{\beta e^{-\beta s_0}}{\alpha e^{\alpha s_0}+\beta e^{-\beta s_0}}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

$$B=1-A=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

3) $E\left[g(s)^{-T}e^{sX_T}\right]=1 \xrightarrow{\text{παραγωγίζω}} E\left[-T\,g(s)^{-T-1}g'(s)\,e^{sX_T}+g(s)^{-T}e^{sX_T}X_T\right]=0$ (*)

$E\left[-T\,g(0)^{-T-1}g'(0)\,e^{0X_T}+g(0)^{-T}e^{0X_T}X_T\right]=0 \Rightarrow$

$E(-T\mu+X_T)=0 \Rightarrow -\mu E(T)=-E(X_T) \Longrightarrow E(T)=\frac{E(X_T)}{\mu}$ όταν $\mu\neq 0$

→ όταν $\mu=0$ από (*) $\xrightarrow{\text{παραγ.}}$ . . . . . .

και βγαίνει $E(T)=\frac{[E(X_T)]^2}{\sigma^2}$ (χρησιμοποιείται χωρίς απόδειξη)

(*) $\mu=E(Y)$, $\sigma^2=Var(Y)$

$E(X_T)=\alpha \underbrace{P(X_T=\alpha)}_{A}-\beta \underbrace{P(X_T=-\beta)}_{B}$

$E(X_T^2)=\alpha^2P(X_T=\alpha)+\beta^2P(X_T=-\beta)=\alpha^2\frac{\beta}{\alpha+\beta}+\beta^2\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

Άσκηση 19 (PDF)

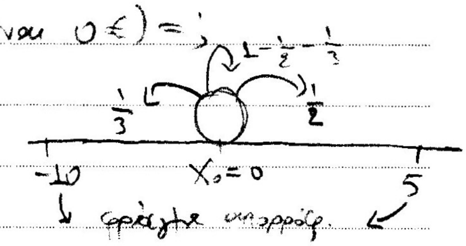
Παίκτης ξεκινά να παίζει ένα τυχερό παιχνίδι με 10€

Σε κάθε "μονομαχία" κερδίζει ή χάνει 1€ με πιθαν. $\frac{1}{2}$ ή $\frac{1}{3}$ αντίστοιχα. Το παιχνίδι σταματά όταν τα χρήματα του είναι 15€. Το παιχνίδι σταματά όταν τα χρήματα του γίνουν 0€

Ποια η πιθανότ. P(τα χρήματα του να είναι 0€) = ;

Λύση

Έστω X_n η στοχαστ. που περιστάνει το κέρδος του μετά το n-οστό παιχνίδι.



Πρόκειται για τυχαίο περίπατο με φράγματα απορρόφησης

P(χρήματα = 0€) = P(απορρόφησης στο -10)

Άρα $-\beta=-10 \Rightarrow \beta=10$ και $\alpha=5$

θα πρέπει ν.δ.ο. P(τελική απορρόφηση) = 1 Το δείξαμε γενικά στο 1ο ερώτημα.

Έστω $X_n = Y_1 + \ldots + Y_n$, Y_i ανεξάρτητες και ισόνομες

$$P(Y_i = y) = \begin{cases} p = \frac{1}{2}, & y = 1 \\ q = \frac{1}{3}, & y = -1 \\ 1-p-q = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, & y = 0 \end{cases}$$

$\mu E(Y_i) = 1 \cdot p + (-1) \cdot q = p - q$

$\sigma^2 = E(Y^2) - (E(Y))^2$

$E(Y^2) = 1^2 \cdot p + (-1)^2 q = p + q$

$g(s) = E(e^{sy}) = e^{s \cdot 1} P(Y=1) + e^{s(-1)} P(Y=-1) + e^{s \cdot 0} \cdot P(Y=0)$

$\quad = pe^{s} + qe^{-s} + 1 - p - q$

$g(s_0) = 1 \Rightarrow pe^{s_0} + qe^{-s_0} + 1 - p - q = 1 \Rightarrow pe^{s_0} + qe^{-s_0} - (p+q) = 0 \Rightarrow$

$\quad p(e^{s_0})^2 + q - (p+q)e^{s_0} = 0$

Θέτω $\lambda = e^{s_0}$ άρα $p\lambda^2 - (p+q)\lambda + q = 0$ (διακρίνουσα) . . .

. . . . $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = \frac{q}{p}$

$e^{s_0} = 1 \Rightarrow s_0 = 0$ Απορρίπτεται

και $e^{s_0} = \frac{q}{p} \Rightarrow s_0 = \ln \frac{q}{p}$

Ισχύει: $E[g(s_0)^{-T} e^{s_0 X_T}] = 1 \Rightarrow E[e^{s_0 X_T}] = 1$

$$A = \frac{1 - e^{-\beta \ln \frac{q}{p}}}{e^{\alpha \ln \frac{q}{p}} - e^{-\beta \ln \frac{q}{p}}} = \frac{1 - e^{-\beta \ln \frac{q}{p}}}{e^{\ln (\frac{q}{p})^{\alpha}} - e^{\ln (\frac{q}{p})^{-\beta}}} = \frac{1 - (\frac{p}{q})^{\beta}}{(\frac{q}{p})^{\alpha} - (\frac{p}{q})^{\beta}} = \ldots = p^{\alpha} \frac{q^{\beta} - p^{\beta}}{q^{\alpha+\beta} - p^{\alpha+\beta}}$$

Αντικατάσταση τα p, q, α, β

Έστω τ.π. με $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$ η περιγραφή τυ επίσης δίνεται η σ.π.π. τυ τ.χ. περιπ.

$$P(Y_i = y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & y=1 \\ \frac{1}{4}, & y=2 \\ \frac{1}{2}, & y=-2 \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν 2 φράγματα απορρόφησης στα σημεία α και β με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και το σώμα βρίσκεται στο $X_0 = 0$

Να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος απορρόφησης και οι πιθανότητες απορρόφησης

Λύση

Έχουμε $\mu = E(Y_i) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

$\mu \neq 0 \Rightarrow \exists\, s_0$ με $s_0 \neq 0$, $g(s_0)=1$ το οποίο προκύπτει από τη λύση $g(s_0)=1$

Όπου $g(s) = E[e^{sy}] = e^{s}\frac{1}{4} + e^{s \cdot 2}\frac{1}{4} + e^{-2s}\frac{1}{2}$

$g(s_0) = 1 \Rightarrow e^{s}\frac{1}{4} + e^{2s}\frac{1}{4} + e^{-2s}\frac{1}{2} = 1$ συνεχίζω όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα